XV Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría

Soluciones sin el axioma de nulidad para juegos cooperativos con utilidad transferible

L. Hernández Lamoneda, R. Juárez y F. Sánchez Sánchez

Noviembre, 2005

En este trabajo se analizan las soluciones para juegos cooperativos que satisfacen los axiomas de aditividad, simetría y eficiencia, estos son los axiomas que tradicionalmente se utilizan para axiomatizar el valor de Shapley con excepción del axioma de nulidad. También obtenemos una expresión para este tipo de soluciones incluyendo el axioma de auto dualidad. Estas expresiones nos permiten dar formulas alternativas para el valor de consenso, el valor generalizado de consenso y el valor de solidaridad. Además, introducimos un nuevo axioma al que llamamos independencia coalicional para remplazar el axioma de simetría con el fin de obtener resultados similares.

CIMAT

1. Preliminares

Definición 1. *Un juego es una pareja* (N, v) *donde* $N \subset \mathbb{N}$ *es un conjunto finito de jugadores y* $v : 2^N \to \mathbb{R}$ *es una función real tal que* $v(\emptyset) = 0$.

(N, z) denota el juego cero, esto es, $z(T) = 0$ para todo $T \subseteq N$.

Definición 2. *Por una solución en* G *entenderemos una función continua*

$$\varphi : G^N \to \mathbb{R}^N.$$

Axioma 1 (Aditividad). *La solución* φ *es aditiva*

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

para todo $v, w \in G^N$.

Axioma 2 (Eficiecia). *Se dice que la solución* φ *es eficiente si*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$$

para todo $v \in G^N$.

Definición 3. *Se dice que el jugador* i *es un jugador nulo en el juego* (N, v) *si* $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ *para cada* $S \subseteq N$.

Axioma 3 (Nulidad)**.** *Si el jugador i es un jugador nulo en el juego (N, v) entonces $\varphi_i(v) = 0$.*

Sea $\Theta = \{\theta : N \to N | \theta \text{ es biyectiva}\}$. Para cada $\theta \in \Theta$ y $v \in G$ se define un nuevo juego $(N, \theta^* v)$ de la siguiente forma

$$\theta^* v(S) = v(\theta^{-1}(S))$$

y para cada $\theta \in \Theta$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se define otro vector $\theta^* x \in \mathbb{R}^n$ donde su $i-$ésima coordenada esta dada por $x_{\theta(i)}$.

Axioma 4 (Simetría)**.** *Se dice que la solución φ es simétrica si y sólo si $\varphi(\theta^* v) = \theta^* \varphi(v)$ para todo θ y $v \in G$.*

Teorema 1 (Shapley, 1953)**.** *Existe una única solución* φ *que satisface aditividad, simetría, nulidad y eficiencia. Además, ésta está dada por*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

2. Soluciones sin el axioma de nulidad

2.1. Expresión general.

Proposición 1. *La solución φ satisface aditividad, simetría y eficiencia si y sólo si es de la forma*

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i, S \neq N} (n-s)[\beta_s v(S) - \beta_{n-s} v(N \backslash S)] \tag{2.1}$$

para algunos $n-1$ números reales $\{\beta_s\}_{s=1}^{n-1}$.

2.2. Interpretación.

Paso 1.

$$\frac{v(N)}{n} \rightarrow \text{jugador } i$$

Paso 2.

Para cada $S \neq N$ transferimos $(n-s)s\beta_s v(S)$ de $N \backslash S$ a S como sigue,

Cada jugador en $N \backslash S$ paga:

$$s\beta_s v(S)$$

Cada jugador en S recive:

$$(n-s)\beta_s v(S)$$

Al final, el jugador i se queda con el monto $\varphi_i(v)$ dado por (2.1).

2.3. Proceso Aleatorio.

S variable aleatoria

Selección de S :

a) $P(\mathbf{S} = N) = \frac{1}{n}$

- Cada jugador recive:

$$v(N)$$

b) Para $S \neq N$, $P(\mathbf{S} = S) = \beta_s$ (el mismo número para coaliciones con la misma cardinalidad)

- Cada jugador en $N \backslash S$ paga:

$$sv(S)$$

- Cada jugador en S recive:

$$(n - s)v(S)$$

El valor esperado que el jugador i obtiene en este proceso es igual al monto $\varphi_i(v)$ dado por (2.1).

CIMAT

2.4. La propiedad de auto dual.

Definición 4. *Dado un juego* $(N, v) \in G$, *diremos que* v^* *es su juego dual si*

$$v^*(S) = v(N) - v(N \backslash S)$$

para todo $S \subseteq N$.

Axioma 5 (Self dual). *Diremos que la solución* φ *es auto dual si* $\varphi(v) = \varphi(v^*)$ *para todo juego* $v \in G$.

Corolario 1. *La solución φ satisface los axiomas de aditividad, simetría, eficiencia y auto dual si y sólo si ésta es de la forma*

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i, S \neq N} (n-s)[\beta_s v(S) - \beta_{n-s} v(N \backslash S)] \tag{2.2}$$

para algún conjunto $[\frac{n+1}{2}]$ *de números reales* $\{\beta_s\}_{s=1}^{n-1}$ *tales que* $\beta_s = \beta_{n-s-1}$.

CIMAT

2.5. El kernel de una solución. El kernel de una solución φ es el espacio vectorial de juegos v tales que $\varphi(v) = 0$. En esta subsección damos una base para el kernel de una solución de la forma (2.1). Sean w_T dados por

$$w_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } S = \{j\},\ j \notin T \\ \frac{\beta_1}{\beta_t} & \text{si } S = T \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

para cada $T \subset N$, $T \neq N$ y $|T| \geq 2$. Además, sea w_N

$$w_N(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| = 1 \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Proposición 2. *Sea φ una solución de la forma (2.1) tal que $\beta_t \neq 0$ para $t = 1, \ldots, n-1$, entonces el conjunto de juegos $\{w_T\}_{|T|\geq 2}$ forma una base para el kernel de φ.*

Dado $v \in G$, la proposición anterior nos permite construir un juego u con las siguientes características:

a) $\varphi(u) = \varphi(v)$ para todo φ de la forma (2.1).
b) $u(S) = 0$ si $|S| \neq 1, n$.
c) $u(N) = v(N)$

Así, u es un juego con la misma solución que v y prácticamente es un juego de bancarrota. Efectivamente, sea u dado por

$$u = v - \sum_{|T| \geq 2, T \neq N} v(T) \frac{\beta_t}{\beta_1} w_T$$

El inciso a) se cumple porque w_T esta en el kernel de φ. Ahora, tomemos S con $|S| \neq 1, n$, entonces

$$u(S) = v(S) - \sum_{|T| \geq 2, T \neq N} v(T) \frac{\beta_t}{\beta_1} w_T(S) = v(S) - v(S) \frac{\beta_t}{\beta_1} w_S(S) = 0$$

CIMAT

Mientras que

$$u(\{j\}) = v(\{j\}) - \sum_{|T|\geq 2, T\neq N} v(T)\frac{\beta_t}{\beta_1} w_T(\{j\}) = v(\{j\}) - \sum_{|T|\geq 2, T\neq N, T\not\ni i} v(T)\frac{\beta_t}{\beta_1}.$$

Además,

$$u(N) = v(N).$$

3. Soluciones con el axioma de independencia coalicional

En esta sección reemplazamos el axioma de simetría con uno nuevo que llamamos independencia coalicional. Este axioma se parece al axioma de "Fair ranking" que define Chun (1989). Aún se caracteriza el valor de Shapley cuando se reemplaza simetría por este axioma en el teorema 1, pero se obtiene una familia de soluciones mucho más grande cuando este reemplazo se realiza en la proposición 1 y en el corolario 1

Definición 5. *Diremos que dos juegos (N, v) y (N, w) solamente difieren en S si y sólo si $v(T) = w(T)$ para toda coalición $T \neq S$.*

Axioma 6 (independencia coalicional)**.** *Diremos que φ satisface el axioma de independencia coalicional si*

$$\varphi_i(v) - \varphi_i(w) = \varphi_j(v) - \varphi_j(w)$$

para cualesquiera dos juegos (N, v) *y* (N, w) *que solo difieran en* S *y* i, $j \in S$ *o* i, $j \in N \backslash S$.

Observación 1. *Nótese que aditividad y simetría implican independencia coalicional, pero aditividad e independencia coalicional no implican simetría. El siguiente ejemplo justifica esta aserción, sea* φ *la solución dada por,*

$$\varphi_i(v) = \sum_{j \in N} j v(\{j\}).$$

Claramente φ *satisface aditividad e independencia coalicional pero no simetría.*

Proposición 3. *La solución φ satisface los axiomas de aditividad, independencia coalicional y eficiencia si y sólo si es de la forma*

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i, S \neq N} (n-s)[\beta_S v(S) - \beta_{N \setminus S} v(N \setminus S)] \tag{3.1}$$

para algún conjunto $2^n - 2$ *de números reales* $\{\beta_S\}_{\emptyset \neq S \subsetneq N}$.

Corolario 2. *La solución φ satisface los axiomas de aditividad, independencia coalicional, eficiencia y auto dualidad si y sólo si es de la forma*

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i, S \neq N} (n-s)[\beta_S v(S) - \beta_{N \setminus S} v(N \setminus S)] \tag{3.2}$$

para algún conjunto de $2^{n-1} - 1$ *números reales* $\{\beta_S\}_{S \subseteq N}$ *tales que* $\beta_S = \beta_{N \setminus S}$.

Proposición 4. *El valor de Shapley es la única solución que satisface aditividad, nulidad, eficiencia e independencia coalicional.*

4. Algunos casos particulares

Igual división de excesos:

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{v(N) - \sum_{j\in N} v(\{j\})}{n}$$

con $\beta_1 = \frac{1}{n}$ y $\beta_s = 0$ de otra forma.

Otra solución auto dual con una expresión simple:

$$\varphi_i(v) = \sum_{S\ni i} \frac{v(S)}{s} - \sum_{S\not\ni i} \frac{v(S)}{n-s}$$

donde $\beta_s = \frac{1}{s(n-s)}$.

4.1. El valor de consenso. Nótese que la combinación lineal convexa de dos soluciones de la forma (2.1) se obtiene con la combinación lineal convexa de sus parámetros, esto es, para cualesquiera dos soluciones φ^{β} y φ^{γ}, y un número real $\theta \in [0, 1]$:

$$(1-\theta)\varphi^{\beta} + \theta\varphi^{\gamma} = \varphi^{(1-\theta)\beta+\theta\gamma}.$$

Además, Ju et al. (2004) demuestra que el valor de consenso es el punto medio entre la solución con igual división de excesos y el valor de Shapley. Con esto obtenemos una expresión alternativa para el valor de consenso:

$$\frac{v(N)}{n}+\frac{1}{2}\left[v(\{i\}) - \frac{\sum_{k\neq i} v(\{k\})}{n-1}\right]+\sum_{S\ni i,|S|\neq n,n-1,1}(n-s)[\beta_s v(S)-\beta_{n-s}v(N\backslash S)].$$

De la misma forma se puede obtener una expresión para cualquier valor de consenso generalizado, esto es, sólo necesitamos reemplazar $\beta_1 = \frac{1-\theta}{n} + \frac{\theta}{n(n-1)}$ y $\beta_s = \frac{\theta(s-1)!(n-s-1)!}{n!}$ para $s = 2, .., n-1$, en (2.1).

4.2. Valor de solidaridad. Nowak y Radzik (1997) introducen el valor de solidaridad. Ellos definen para cualquier coalición no vacía T y cualquier juego $v \in G$,

$$A^v(T) = \frac{1}{t} \sum_{k \in T} [v(T) - v(T \backslash \{k\})]$$

y lo utilizan para definir de la siguiente forma el valor de solidaridad para el jugador i,

$$\psi_i(v) = \sum_{T \ni i} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} A^v(T) \tag{4.1}$$

Caracterizan este valor con los axiomas de eficiencia, aditividad, simetría y A-nulidad, así, el valor de solidaridad debe ser un caso especial de (2.1). Si desarrollamos (4.1), el coeficiente de $v(S)$, para una coalición T que no contiene a i, es $\frac{(n-s-1)!s!}{n!}\frac{1}{s+1}$. Así, este coeficiente corresponde a $s\beta_s$ en (2.1), y de esta forma

$$\beta_s = \frac{(n-s-1)!(s-1)!}{(s+1)n!}$$

lo que nos da una expresión alternativa para (4.1):

$$\psi_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \sum_{S \ni i, S \neq N} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} \left[\frac{v(S)}{s+1} - \frac{v(N \backslash S)}{n-s+1}\right].$$

Además, el valor de solidaridad no es auto dual ya que $\beta_s \neq \beta_{n-s}$.

4.3. La solución de mínimos cuadrados. Por último, Ruiz et al. (1996) introducen la solución de mínimos cuadrados,

$$\lambda_i(v) = \frac{v(N)}{n} + \frac{1}{n2^{n-2}} \left[\sum_{S \ni i} (n-s)v(S) - \sum_{S \not\ni i} sv(S) \right]$$

Esta solución también es de la forma (2.1). Los parámetros correspondientes son $\beta_s = \frac{1}{n2^{n-2}}$.

CIMAT

Referencias

[1] Banzhaf, J. F., III, 1965, “Weighted Voting Doesn’t Work: A Mathematical Analysis,” *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.

[2] Chun, Y. 1989, “A New Axiomatization of the Shapley Value,” *Games and Economic Behavior*, 1(2), 119-130.

[3] Dubey P., Neyman A. and Weber R.J., 1981, “Value Theory without Efficiency”, *Mathematics of Operations Research*, 6(1), 122-128.

[4] Dubey, P. and Shapley, L. S., 1979 “Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index,” *Mathematics of Operations Research*, 4, 99-131.

[5] Hart, S., Mas-Colell, A., 1989, “Potential Value and Consistency,” *Econometrica*, 57(3), 589-614.

[6] Ju Y., Borm P. and Ruys P., 2004, “The Consensus Value: a New Solution Concept for Cooperative Games,” *CentER Discussion Paper* No. 2004-50.

[7] Hernández L., Juárez R. and Sánchez F., 2005, Dissection of co-operative solutions in game theory using representation techniques. (Submitted)

[8] Kalai, E., and D. Samet, 1987, "On weighted Shapley values," *International Journal of Game Theory*, 16, 205-222.

[9] Nowak A. S. and Radzik T., 1997, " A Solidarity Value for n-Person Transferable Utility Games," *International Journal of Game Theory*, 23, pp.43-48.

[10] Nowak A.S., Radzik T., 1995, "On axiomatizations of the weighted Shapley values. *Games and Economic Behavior*, 8, 389-405.

[11] Ruiz, L.M., Valenciano, F. and Zarzuelo J.M., 1996, "The least Square Prenucleoulus and the Least Square Nucleolus. Two values for TU Games Based on teh Excess Vector", *International Journal of Game Theory*, 25, 113-134.

[12] Roth, A. E., 1977, "The Shapley value as a von Neumann-Morgenstern Utility," *Econometrica,* 45, 657-664.

[13] Shapley L.S., 1953, A value for n-person games , in "*Contributions to the Theory of Games II*," *Annals of Mathematics Studies* (Princeton University Press, Princeton) 28, 307-312.

[14] Weber, R. J., 1979, "Subjectivity in the Valuation of Games," in O. Moeschlin and D. Pallaschke, eds., "Game Theory and Related Topics", (North-Holland Publishing Company, New York) p.p. 129-136.